Miền $E \subset \mathbb{R}^3$

$$x^2 + y^2 + (z+4)^2 \leq 25, \quad z \geq 0$$

Đây là hình cầu tâm $(0, 0, -4)$, bán kính 5, bị cắt bởi mặt phẳng $z = 0$ (chỉ lấy phần phía trên).

Phần (a) — Tính thể tích bằng tọa độ trụ

Bước 1 — Hiểu hình học

Phương trình:

$$x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 25$$

Tâm: $O'(0, 0, -4)$, bán kính $R = 5$. Mặt phẳng cắt: $z = 0$.
Tại $z = 0$:

$$x^2 + y^2 + (0+4)^2 \leq 25 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 \leq 9$$

Giao tuyến là hình tròn bán kính 3.

Bước 2 — Chọn hệ tọa độ

Do có $x^2 + y^2$, chọn tọa độ trụ:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Bước 3 — Tìm cận tích phân

Từ bất đẳng thức cầu:

$$r^2 + (z+4)^2 \leq 25 \;\Rightarrow\; (z+4)^2 \leq 25 - r^2.$$

Suy ra:

$$-4 - (25 - r^2) \leq z \leq -4 + (25 - r^2).$$

Nhưng đề cho $z \geq 0$, nên:

$$0 \leq z \leq -4 + (25 - r^2).$$

Điều kiện tồn tại:

$$-4 + (25 - r^2) \geq 0 \;\Rightarrow\; r^2 \leq 9 \;\Rightarrow\; 0 \leq r \leq 3.$$

Tổng hợp cận:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq z \leq -4 + (25 - r^2).$$

Bước 4 — Lập tích phân thể tích

Trong tọa độ trụ: $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$.

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{-4+(25-r^2)} r\,dz\,dr\,d\theta.$$

Bước 5 — Tính tích phân

Theo z:

$$\int_0^{-4+(25-r^2)} r\,dz = r(-4 + 25 - r^2).$$

Theo r:

$$\int_0^3 r(-4 + 25 - r^2)\,dr = \int_0^3 (-4r + 25r - r^3)\,dr.$$

Tách ra:

$$-4\int_0^3 r\,dr + \int_0^3 r(25 - r^2)\,dr.$$

Phần 1:

$$-4\int_0^3 r\,dr = -4 \cdot \frac{9}{2} = -18.$$

Phần 2 (đặt $u = 25 - r^2$):

$$\int_0^3 r(25 - r^2)\,dr = \frac{1}{2}\int_{16}^{25} u^{1/2}\,du = \frac{1}{3}(125 - 64) = \frac{61}{3}.$$

Cộng lại:

$$-18 + \frac{61}{3} = \frac{7}{3}.$$

Theo θ:

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{7}{3}\, d\theta = \frac{14\pi}{3}.$$

Kết quả phần (a):

$$\text{Vol}(E) = \frac{14\pi}{3}.$$

Phần (b) — Kiểm tra bằng Gauss–Ostrogradsky

Ý tưởng

Muốn:

$$\iiint_E 1\, dV.$$

Chọn trường $\vec{F}$ sao cho $\nabla \cdot \vec{F} = 1$.

Bước 1 — Chọn trường vector

Chọn:

$$\vec{F} = \left(\frac{x}{3},\ \frac{y}{3},\ \frac{z}{3}\right).$$

Khi đó:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Bước 2 — Áp dụng Gauss

$$\iiint_E 1\, dV = \iiint_E (\nabla \cdot \vec{F})\, dV = \iint_{\partial E} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS.$$

Bước 3 — Mặt biên ∂E

Gồm 2 phần:

- S_1: mặt cầu $x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 25,\ z \geq 0$.
- S_2: mặt phẳng $z = 0,\ x^2 + y^2 \leq 9$.

Bước 4 — Thông lượng qua S_2

Trên $z = 0$: $\vec{n} = (0, 0, -1)$.

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = -\frac{z}{3} = 0.$$

Do đó:

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 0.$$

Bước 5 — Suy ra

$$\iint_{\partial E} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_E 1\, dV = \frac{14\pi}{3}.$$

Trùng kết quả phần (a).

Kết luận cuối

Phần	Kết quả
(a)	$\frac{14\pi}{3}$
(b)	Gauss kiểm chứng đúng

Tóm tắt "học tủ đi thi"

- Hình cầu cắt bởi mặt phẳng $\rightarrow$ dùng tọa độ trụ.
- Muốn kiểm tra thể tích $\rightarrow$ chọn $\nabla \cdot F = 1$.
- Mặt phẳng đáy thường cho thông lượng = 0.